不定内積をもつHilbert空間上の作用素 (ヒルベルト空間上の作用素)

冨田, 稔

数理解析研究所講究録
256巻 1975年 33-39

不定内積をもつHilbert空間上の作用素

九大・理 冨田 稔

最近Hilbert空間上の作用素の性質を不定内積に基いて調べる論文および著書が出ているが，基本的な問題は殆ど解決していないし，また研究方法が発展していない。そこにHilbert空間の作用素解析のいろいろなtechnique，例えばsingle operatorの理論，群のunitary表現論，作用素環論などを応用する余地が十分残っていると思われる。

§1. 不定内積.

(H, φ) でHilbert空間 H に H の不定内積 φ を合せて考えたものをあらわす． φ は $H\times H$ のsesquilinear formで

$$\varphi(x,y) = \overline{\varphi(y,x)},$$

$$\|x\| = \sup_{\|y\|\leq 1} |\varphi(x,y)|$$

をみたすものである． φ に対して H のunitary Hermitean作用素 φ が唯一つ存在し，次の等式により φ を定めている。

$$\varphi(x,y) = (\varphi x|y).$$

Hで稠密に定義された線形作用素 a に対しては a の φ-adjoint a^{φ} が定義されるが，それは次式をみたす：

$$a^{\varphi} = \varphi a^{*} \varphi .$$

φ はHの射影 φ^{+}, φ^{-} を用いて

$$e = \varphi^{+} + \varphi^{-}, \quad \varphi = \varphi^{+} - \varphi^{-},$$

(但し e はHの恒等作用素）の形にかける。

§2. Lorentz 作用素.

(H, φ) の作用素 a で $a^{\varphi} = a^{-1}$ をみたすものをLorentz作用素という。Hが有限次元のとき，(H, φ) のLorentz作用素全体がLorentz群であるがそのCartan分解に相当する一般のLorentz作用素の分解定理は次の通りである。

定理 1. (H, φ) のLorentz作用素 a の von Neumann 極分解を $a = bu$ ($b \geq 0$, u は unitary) とすれば，b, u はLorentz作用素である。φ^{-} が有限次元ならば a はHの連続作用素になる。

証明. $b^{2} = aa^{*}$ で aa^{*} はLorentz作用素になり従って

$$\varphi (aa^{*}) \varphi = (aa^{*})^{-1}.$$

これからも $\varphi b \varphi = b^{-1}$ をみたすことがわかる。$\log b = c$ とすれば $c = c^{*}$ で $\varphi c \varphi = -c$. もし φ^{-} が有限次元なら c が有限次元で連続になることがわかり，これから b が

有界．従ってαも有界になる。

§3. φ-Projection とφ-selfadjoint nilpotent作用素.

[M]でHの部分集合Mの閉線形被を，また[α]で作用素αのHでのrange Projector をあらわす。

Hの linear subspace M に対するφに関する annihilator は $\varphi M^{\perp}$ になる。Hにおける Projector，すなわち $f^2=f=f^*$ をみたす作用素f以外に，$f^2=f=f^{\varphi}$ をみたす(H,φ)の作用素fを考えこれをφ-projector という。

与えられたHの閉部分空間Mがあるφ-Projector fの値域になる為の必要十分条件は

$$M \wedge \varphi M^{\perp} = \{0\}, \quad [M+\varphi M^{\perp}] = H$$

が成立することである。このような閉部分空間Mは(H,φ)でφ-Complementary であるという。また $\varphi M^{\perp} \supset M$ であるときMはφ-selfannihilating であるという。

定理．(H,φ)の任意の閉部分空間Mは次のようにHで直交分解される

$$M = M_n \oplus M_\alpha, \quad M_n = M \wedge \varphi M^{\perp}$$

但し，M_α はMに含まれる最大のφ-Complementaryな閉部分空間で，

$$(\varphi M^{\perp})_n = M_n, \quad (M^{\perp})_n = \varphi M_n,$$

$$H = M_n + \varphi M_n + [M_\alpha + (\varphi M^{\perp})_\alpha].$$

M が φ-Complementary な為の必要十分条件は $M = M_\alpha$ となること。 M が φ-selfannihilating になる為の必要十分条件は $M = M_n$ となることである。

φ^- が有限次元のときは M_n は有限次元で

$$\dim M_n \leqq \dim \varphi^- .$$

証明。 M を値域とする射影を f とすれば M_n に対する射影 f_n は

$$f_n = f - [f\varphi f] .$$

M_α を値域とする φ-Projection f_α は

$$f_\alpha = [f\varphi f](f\varphi f)^+(f\varphi f)\varphi$$

これから計算によって定理を証明することが出来る。

定理. f を $f = f^\varphi$ となる nilPotent operator とすれば f の値域の閉包は φ-annihilating になる.

証明. $g = f\varphi$ とすれば $g = g^*$, $f = g\varphi$ 。 f が nilpotent だから $(g\varphi)^n = 0$ となる $n \geqq 2$ が存在する.

$[f] = [g]$ より

$$[f]\varphi(g\varphi)^{n-1} = 0, \quad \varphi([f]x, (g\varphi)^{n-1}y) = 0$$

より
$$\varphi([f]x, [f]\varphi(g\varphi)^{n-2}y) = 0 .$$

これから

$$\varphi([f]_\alpha x, (g\varphi)^{n-2}y) = 0$$

$$\varphi([f]_\alpha x, [f]_\alpha (g\varphi)^{n-4}y) = 0$$

となり

$$\varphi([f]_\alpha x,\ (g\varphi)^{n-4}y)=0.$$

最後に $[f]_\alpha=0$ 従って $[f]=[f]_n$ を得る。

§4. Lifschitz の定理の応用。

$a=a^\varphi$ である作用素 a は φ-selfadjoint であるという。φ^- が有限次元であれば φ-selfadjoint な作用素 a は compact な imaginary part をもつ（$a-a^*$ の range は有限次元である）。従って Lifschitz によって始められた spectre 解析を適用出来る。更に，

定理。φ^- が有限次元であるとする。φ-selfadjoint 作用素 a の実でない spectre は有限個で，それに対する固有空間の次元も有限次元である。

実際，a の実でない spectre 全体は高々可算で集積値は実軸上にしかない。λ が実でない固有値とすれば $\bar{\lambda}$ も同様で，Γ を λ を廻る円周 $|z-\lambda|=\varepsilon$ とすれば ε が十分小さいとき，

$$e(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma (a-\lambda)^{-1}d\lambda$$

であらわされる $e(\lambda)$ は idenpotent である。λ と μ が相異なる point spectre ならば

$$e(\lambda)e(\mu)=0.$$

また $a=a^\varphi$ より

$$e(\bar{\lambda}) = e(\lambda)^{\varphi}。$$

いま　$\mathrm{Im}\lambda_i > 0$ となる相異なる spectre を $\lambda_1, \cdots \lambda_K$ とし

$$f = e(\lambda_1) + \cdots + e(\lambda_K)$$

とすれば

$$f^2 = f \ , \quad f^{\varphi} f = f f^{\varphi} = 0 .$$

これより $[f] = [f]_n$ となり f の値域の次元は $\leqq \varphi^-$ の次元となる。

一般の場合の φ-selfadjoint な作用素の解析は，実質的には勝手な閉作用素の spectre 解析と同値になる。
今一つ特殊な φ-selfadjoint 作用素の場合を考える。

いま a を φ-selfadjoint 作用素とすれば $a\varphi = (a\varphi)^*$.
従って a は

$$a = bc$$

b は positive operator $(aa^*)^{\frac{1}{2}}$, c は $c\varphi$ = Hermitean unitary となる。 そこで u を Hermitean unitary operator として $u\varphi = a$ の表現を得る。 u と φ の相互関係を詳しく調べるために $\varphi^2 = u^2 = e$ に注意して φ と u から自由に生成される discrete 群 G をとる。 G の dual $\hat{G}$ は $(0^+, 0^+)$, $0 < \theta < \pi$, π^+, π^- の形の T_0 空間である。 $\hat{G}$ の各点に対する G の既約表現 $x \to x(\theta)$ は次のように表わされる。

$$\varphi(0^+) = u(0^+) = 1, \qquad \varphi(0^-) = u(0^-) = -1 .$$

$$\varphi(\pi^+)=1,\ u(\pi^-)=1,\quad \varphi(\pi^+)=-1,\ u(\pi^-)=1.$$

$0<\theta<\pi$ に対しては

$$\varphi(\theta)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad u(\theta)=\begin{pmatrix}0&e^{i\theta}\\e^{-i\theta}&0\end{pmatrix}.$$

G 上の Positive definite function P は次のように表現される。P に対して $0\leqq\theta\leqq2\pi$ 上の2つの測度 $\mu_1\geqq0$, $\mu_2\geqq0$, および $0<\theta<2\pi$ の各 θ に対する 2×2 の unitary 行列

$$u(\theta)=(u_{ij}(\theta)),\quad u_1(\theta)=\begin{pmatrix}u_{11}(\theta)\\u_{21}(\theta)\end{pmatrix},\quad u_2(\theta)=\begin{pmatrix}u_{12}(\theta)\\u_{22}(\theta)\end{pmatrix}$$

があって,

$$P_1(x)(\theta)=(x(\theta)u_1(\theta)\mid u_1(\theta)),\quad 0<\theta<\pi^-$$

$$P_1(x)(0)=x(0^+),\quad P_1(x)(\pi)=x(\pi^+),$$

$$P_2(x)(\theta)=(x(\theta)u_2(\theta)\mid u_2(\theta)),\quad 0<\theta<\pi$$

$$P_2(x)(0)=x(0^-),\quad P_2(x)(\pi)=x(\pi^-)$$

とすれば

$$P(x)=\int P_1(x)(\theta)d\mu_1(\theta)+\int P_2(x)(\theta)d\mu_2(\theta)).$$

この表現を利用して H を direct integral として表現することによって u と φ の関係を確めることが可能になる。